УДК 517.988.6

УРАВНЕНИЯ С ВОЛЬТЕРРОВЫМИ НА СИСТЕМЕ ОТНОШЕНИЙ НАКРЫВАЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© **Е.С. Жуковский, М.Ж. Алвеш**

Ключевые слова: уравнение Volterra; локальное решение; продолжение решений; обобщенно вольтеррово отображение; накрывающее отображение метрических пространств.
Исследуется разрешимость уравнения общего вида с обобщенно вольтерровым отображением метрических пространств. Вольтерровость определяется как свойство сохранения отображением системы отношений эквивалентности. При соответствующем выборе системы отношений это понятие равносильно различным известным трактовкам свойства эволюции, причинности операторов, в том числе классическому определению вольтерровости по А.Н. Тихонову. Доказана теорема о существовании и продолжаемости решений. Используются утверждения о накрывающих отображениях метрических пространств.

В работе [1] было предложено понятие вольтерровости на системе отношений эквивалентности оператора, действующего в банаховом пространстве B. При соответствующем выборе системы отношений это понятие равносильно различным известным трактовкам свойства эволюции, причинности операторов, в том числе классическому определению вольтерровости по А.Н. Тихонову [2]. Применение классических принципов неподвижных точек позволяет доказать утверждения об уравнении вида

$$x = G(x) \tag{1}$$

с вольтерровым на системе отношений оператором $G : B \to B$. В [3],[4] результаты о разрешимости и корректной разрешимости уравнения (1) перенесены на случай, когда B — полное метрическое пространство. Результаты [5-7] о накрывающих отображениях позволяют исследовать уравнения гораздо более общего вида с вольтерровыми на системе отношений отображениями метрических пространств. Настоящая работа посвящена вопросам разрешимости таких уравнений. Отметим, что уравнения общего вида с вольтерровыми по А.Н. Тихонову отображениями метрических пространств подробно исследованы в [8].

Пусть в метрическом пространстве (X, ρ_X) определено отношение эквивалентности $\sim$. Для любых двух классов эквивалентности $\bar{x}$, $\bar{u}$ положим

$$d_X(\bar{x}, \bar{u}) = \inf_{x\in\bar{x},\, u\in\bar{u}} \rho_X(x, u). \tag{2}$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Если формула* (2) *задает метрику в фактор-множестве* $X/\!\sim$, *то для любых элементов* $x,\ u,\ x_i,\ u_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots$, *из соотношения* $x_i \sim u_i$, *выполненного при всех* i, *и сходимости* $\rho_X(x_i, x) \to 0$, $\rho_X(u_i, u) \to 0$, *следует* $x \sim u$.

П р е д л о ж е н и е 2 [3]. *Пусть метрическое пространство* X *является полным, и пусть для каждого элемента* $x \in X$ *его класс эквивалентности* $\bar{x}$ *есть замкнутое множество. Предположим, также, что выполнены условия:*

($\mathtt{d}^2$) *для произвольного* $\varepsilon > 0$, *для любых трех классов* $\bar{x}, \bar{u}, \bar{w} \in X/\!\sim$ *существуют такие элементы* $x \in \bar{x}$, $u \in \bar{u}$, $w \in \bar{w}$, *что имеет место неравенство* $\rho_X(x,u) + \rho_X(u,w) \leqslant \leqslant d_X(\bar{x},\bar{u}) + d_X(\bar{u},\bar{w}) + \varepsilon$;

($\mathtt{d}^\infty$) *для любой последовательности классов* $\bar{x}_i\in X/\!\sim,$ $i=1,2,\ldots,$ *если сходится ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} d_X(\bar{x}_i\bar{x}_{i+1}),$ *то можно так выбрать представителя каждого класса* $x_i\in\bar{x}_i,$ *что ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_X(x_i,x_{i+1})$ *также сходится.*

Тогда формула (2) *определяет метрику в фактор-множестве* $X/\!\sim,$ *причем* $\big(X/\!\sim,d_X\big)$ *является полным метрическим пространством.*

З а м е ч а н и е. Очевидно, при всех $\bar{x},\bar{u}\in X/\!\sim,$ $x\in\bar{x},$ $u\in\bar{u}$ справедливо неравенство $d_X(\bar{x},\bar{u})\leqslant\rho_X(x,u).$ Если имеет место соотношение

$$\forall\,\varepsilon\geqslant 0\quad\forall\,\bar{x},\bar{u}\in X/\!\sim\quad\forall\,x\in\bar{x}\quad\exists\,u\in\bar{u}\quad d_X(\bar{x},\bar{u})\geqslant\rho_X(x,u)-\varepsilon,\tag{3}$$

то условия $(\mathtt{d}^2),(\mathtt{d}^\infty)$ оказываются выполненными. Требование (3) использовалось в [7].

Теперь сформулируем определение свойства вольтерровости на системе отношений отображения, действующего в метрических пространствах. Пусть каждому $\gamma\in[0,1]$ поставлено в соответствие отношение эквивалентности $\vartheta_X(\gamma)$ на множестве $X.$ Назовем элементы $x,u\in X,$ удовлетворяющие этому бинарному отношению, $\vartheta(\gamma)$-эквивалентными. Обозначим $\overline{x}_\gamma$ – класс $\vartheta_X(\gamma)$-эквивалентности элемента $x\in X.$ Будем говорить, что совокупность

$$\mathfrak{V}_X=\{\,\vartheta_X(\gamma)\mid\gamma\in[0,1]\,\}$$

рассматриваемых отношений удовлетворяет условию $(\mathtt{v}),$ если:

($\mathtt{v}_0$) значению $\gamma=0$ соответствует отношение $\vartheta_X(0)=X^2$ (то есть любые два элемента являются $\vartheta_X(0)$-эквивалентными);

($\mathtt{v}_1$) значению $\gamma=1$ соответствует отношение равенства (то есть никакие два разных элемента не вступают в отношение $\vartheta_X(1)$);

($\mathtt{v}_\gamma$) из $\gamma>\eta,$ следует $\vartheta_X(\gamma)\subseteq\vartheta_X(\eta)$ (любые два $\vartheta_X(\gamma)$-эквивалентных элемента будут $\vartheta_X(\eta)$-эквивалентными, если $\gamma>\eta$).

Пусть $(X,\rho_X),$ (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Всюду ниже предполагается, что пространство X полное и в нем задана удовлетворяющая требованиям $(\mathtt{v})$ система $\mathfrak{V}_X$ отношений эквивалентности. Кроме того, считаем, что при любом $\gamma\in[0,1]$ каждый класс эквивалентности замкнут, а фактор-множество $X/\vartheta_X(\gamma)$ относительно метрики

$$\rho_{X/\vartheta_X(\gamma)}(\bar{x}_\gamma,\bar{u}_\gamma)=d_X(\bar{x}_\gamma,\bar{u}_\gamma)=\inf_{x\in\bar{x}_\gamma,\,u\in\bar{u}_\gamma}(x,u)$$

является полным. Далее, предполагается, что в метрическом пространстве Y также задана некоторая система отношений эквивалентности $\mathfrak{V}_Y=\{\,\vartheta_Y(\gamma)\mid\gamma\in[0,1]\,\},$ удовлетворяющая условиям $(\mathtt{v});$ при любом $\gamma\in[0,1]$ равенство

$$\rho_{Y/\vartheta_Y(\gamma)}(\bar{y}_\gamma,\bar{w}_\gamma)=d_Y(\bar{y}_\gamma,\bar{w}_\gamma)=\inf_{y\in\bar{y}_\gamma,\,w\in\bar{w}_\gamma}(y,w)$$

задает метрику в фактор-пространстве $Y/\vartheta_Y(\gamma)$ (полнота пространств $Y,\,Y/\vartheta_Y(\gamma)$ и замкнутость классов эквивалентности $\bar{y}_\gamma\subset Y$ не требуется).

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $F:X\to Y$ будем называть *вольтерровым* (*на системах* $\mathfrak{V}_X,\,\mathfrak{V}_Y$ *отношений эквивалентности*), если для каждого $\gamma\in[0,1]$ и любых $x,u\in X$ из $(x,u)\in\vartheta_X(\gamma)$ следует $(Fx,Fu)\in\vartheta_Y(\gamma).$ Таким образом, вольтеррово отображение сохраняет при любом $\gamma\in[0,1]$ отношения эквивалентности, отображая эквивалентные элементы множества X в эквивалентные элементы множества $Y.$

Приведем некоторые свойства вольтерровых отображений, непосредственно вытекающие из их определения.

1. Пусть отображение $F:X\to Y$ является вольтерровым на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$. Пусть множество $\Gamma\subset[0,1]$ таково, что $\{0,1\}\subset\Gamma$, и для каждой убывающей последовательности $\{\gamma_i\}\subset\Gamma$ (или для всякой возрастающей последовательности) выполнено $\lim_{i\to\infty}\gamma_i\in\in\Gamma$. Определим функцию $\eta:[0,1]\to\Gamma$ равенством $\eta(\gamma)=\inf\{\,\xi\in\Gamma\mid\xi\geqslant\gamma\,\}$ (во втором случае, $\eta(\gamma)=\inf\{\,\xi\in\Gamma\mid\xi\leqslant\gamma\,\}$). Поставим в соответствие каждому числу $\gamma\in[0,1]$ отношения эквивалентности $\vartheta_X(\eta(\gamma))$ и $\vartheta_Y(\eta(\gamma))$ и обозначим $\mathfrak{W}_X=\{\,\vartheta_X(\gamma)\mid\gamma\in\Gamma\,\}$, $\mathfrak{W}_Y==\{\,\vartheta_Y(\gamma)\mid\gamma\in\Gamma\,\}$. Тогда отображение $F:X\to Y$ будет вольтерровым на подсистемах $\mathfrak{W}_X, \mathfrak{W}_Y$.

2. Пусть $F:X\to Y$ является вольтерровым на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$, $G:Y\to Z$ — вольтерровым на системах $\mathfrak{V}_Y, \mathfrak{V}_Z$. Тогда композиция $GF:X\to Z$ обладает свойством вольтерровости на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Z$.

3. Для любой системы $\mathfrak{V}_X$ отношений эквивалентности пространства X тождественный оператор $I:X\to X$ будет вольтерровым на $\mathfrak{V}_X$.

4. Пусть заданы: вольтеррово на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$ отображение $F:X\to Y$, $u\in X$, $w==Fu\in Y$, $\gamma_0\in(0,1)$. Пусть $\bar u_{\gamma_0}$ – класс $\vartheta_X(\gamma_0)$-эквивалентности элемента u. Тогда $\bar u_{\gamma_0}$ является полным метрическим пространством (относительно метрики ρ_X); система отношений $\{\vartheta_X(\gamma)\}$ на этом подмножестве удовлетворяет условиям $(\mathtt{v})$; при любом γ метрическое пространство $\bar u_{\gamma_0}/\vartheta(\gamma)$ является полным. Аналогично, система отношений $\{\vartheta_Y(\gamma)\}$ на подмножестве $\bar w_{\gamma_0}$ – классе $\vartheta_Y(\gamma_0)$-эквивалентности элемента w, будет удовлетворять условиям $(\mathtt{v})$; фактор-множество $\bar w_{\gamma_0}/\vartheta(\gamma)$ будет метрическим пространством. Из вольтерровости отображения $F:X\to Y$ на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$ следует вольтерровость его сужения $F^{\gamma_0}:\bar u_{\gamma_0}\to\bar w_{\gamma_0}$ на сужении $\mathfrak{V}_{\bar u_{\gamma_0}}, \mathfrak{V}_{\bar w_{\gamma_0}}$ исходных систем эквивалентности.

5. Пусть задано вольтеррово на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$ отображение $F:X\to Y$. Для каждого $\gamma\in(0,1)$ определим канонические проекции $\Pi_X^\gamma:X\to X/\vartheta_X(\gamma)$, $\Pi_X^\gamma x=\bar x_\gamma$; $\Pi_Y^\gamma:Y\to\to Y/\vartheta_Y(\gamma)$, $\Pi_Y^\gamma y=\bar y_\gamma$. Обозначим

$$F_\gamma : X/\vartheta_X(\gamma)\to Y/\vartheta_Y(\gamma),\quad F_\gamma\bar x_\gamma=\Pi_Y^\gamma Fx, \tag{4}$$

где x – любой элемент класса $\bar x_\gamma$. Тогда это отображение также обладает свойством вольтерровости.

6. Если последовательность $\{F_i\}$ вольтерровых на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$ отображений $F_i:X\to Y$ сильно сходится к $F:X\to Y$ (то есть $\rho(F_ix,Fx)\to0$, $\forall\,x\in X$), то отображение F также вольтеррово на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$.

Пусть заданы элемент $y\in Y$ и вольтеррово на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$ отношений эквивалентности отображение $F:X\to Y$. Рассмотрим уравнение

$$Fx=y \tag{5}$$

относительно неизвестного $x\in X$. Для каждого $\gamma\in(0,1)$ определим равенством (4) оператор $F_\gamma:X/\vartheta_X(\gamma)\to Y/\vartheta_Y(\gamma)$ и положим $\bar y_\gamma=\Pi_Y^\gamma y$.

О п р е д е л е н и е 2 [3]. Если для некоторого $\gamma\in(0,1)$ существует класс эквивалентности $\bar z_\gamma\in X/\vartheta_X(\gamma)$, удовлетворяющий равенству $F_\gamma\bar z_\gamma=\bar y_\gamma$, то уравнение (5) будем называть *локально разрешимым,* а класс $\bar z_\gamma\in X/\vartheta_X(\gamma)$ – его $\vartheta_X(\gamma)$*-локальным решением.* Элемент $z\in X$, удовлетворяющий уравнению (5), назовем *глобальным решением.* Отождествляя элемент z с классом $\vartheta_X(1)$-эквивалентности $\bar z_1=\{z\}$, содержащим лишь один этот элемент, будем глобальным решением считать также класс $\bar z_1$. Если $0<\xi<\gamma\leqslant1$ и если $\bar z_\xi$, $\bar z_\gamma$ – соответственно $\vartheta_X(\xi)$-локальное и $\vartheta_X(\gamma)$-локальное (или глобальное при $\gamma=1$) решения, удовлетворяющие включению $\bar z_\gamma\subseteq\bar z_\xi$, то будем называть решение $\bar z_\gamma$ *продолжением решения* $\bar z_\xi$, решение $\bar z_\xi$ – *частью решения* $\bar z_\gamma$. Заметим, что для произвольного локального или глобального решения $\bar{z}_\gamma$ при любом $\xi \in (0,\gamma]$ существует единственный класс $\bar{z}_\xi$, для которого имеет место $\bar{z}_\gamma \subseteq \bar{z}_\xi$. Этот факт позволяет отождествить локальное или глобальное решение $\bar{z}_\gamma$ с отображением, ставящим в соответствие каждому числу $\xi \in (0,\gamma]$ такой класс $\bar{z}_\xi$, что $\bar{z}_\gamma \subseteq \bar{z}_\xi$. Имея в виду это отображение, можем говорить, что решение $\bar{z}_\gamma$ определено на $(0,\gamma]$. *Предельно продолженным решением, определенным на* $(0,\gamma)$, будем называть отображение, сопоставляющее каждому $\xi \in (0,\gamma)$ локальное решение $\bar{z}_\xi \in X/\vartheta_X(\xi)$, и удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall\, \eta,\xi \quad 0<\eta<\xi<\gamma \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_\xi \subseteq \bar{z}_\eta, \quad \lim_{\xi\to\gamma-0} d_X(\bar{z}_\xi,\bar{u}_\xi)=\infty.$$

Здесь $u\in X$ – некоторый фиксированный элемент. Отметим, что если существует $u\in X$, для которого имеет место $\lim\limits_{\xi\to\gamma-0} d_X(\bar{z}_\xi,\bar{u}_\xi)=\infty$, то для произвольного $v\in X$ выполнено аналогичное равенство $\lim\limits_{\xi\to\gamma-0} d_X(\bar{z}_\xi,\bar{v}_\xi)=\infty$, то есть приведенное определение корректностно. Любое сужение на $(0,\eta]\subset(0,\gamma)$ предельно продолженного решения — отображения $\xi\in \in(0,\gamma) \quad\mapsto\quad \bar{z}_\xi\in X/\vartheta_X(\xi)$, является, очевидно, локальным решением. Будем называть это сужение *частью предельно продолженного решения.*

Отметим, что «классические» уравнения с вольтерровыми по А.Н. Тихонову операторами рассматриваются в пространствах функций, определенных на некотором отрезке $[a,b]$, и локальным решением называют функцию z_c, определенную на $[a,c]$, $c<b$, удовлетворяющую на этом отрезке заданному уравнению. Функция z_c может отождествляться с классом функций, являющихся всевозможными ее продолжениями на весь $[a,b]$. Таким образом, известные определения решений уравнений Volterra равносильны приведенным выше, если на соответствующих функциональных пространствах определить при каждом $\gamma\in(0,1)$ отношение эквивалентности

$$(x,u)\in\vartheta_X(\gamma) \quad\Leftrightarrow\quad x(t)=u(t),\ t\in[a,a+\gamma(b-a)].$$

Для формулировки условий разрешимости уравнения (5) приведем определение понятия накрывающего отображения.

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства. В дальнейшем будем предполагать, что пространство X полно. Обозначим через $B_X(u,r)$ замкнутый шар в пространстве X с центром в u радиуса $r\geqslant 0$. Пусть определено отображение $G:X\to Y$ и задано положительное число α.

О п р е д е л е н и е 3. Отображение G называется *α-накрывающим* (см. [5]), если для любых $u\in U$, $r>0$ имеет место включение $B_Y(G(u),\alpha r)\subset G\big(B_X(u,r)\big)$. Отображение G называется *условно α-накрывающим* (см. [7]), если $B_Y(G(u),\alpha r)\bigcap G(U)\subset G\big(B_X(u,r)\big)$.

Непосредственно из результатов [7] получаем следующее утверждение о локальной разрешимости уравнения (5) в предположении, что

$$F(x)=\Upsilon(x,x) \quad \forall\, x\in X,$$

где отображение $\Upsilon: X^2\to Y$ вольтеррово по каждому аргументу на системах $\mathfrak{V}_X$, $\mathfrak{V}_Y$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть существуют такие $\gamma\in(0,1)$, $\alpha>0$, $0\leqslant\beta<\alpha$, что выполнены следующие условия: отношение эквивалентности $\vartheta_X(\gamma)$ обладает свойствами $(\mathit{d}^2), (\mathit{d}^\infty)$; при любом $x_2\in X$ отображение*

$$\Upsilon_{\gamma,1}(\cdot,x_2): X/\vartheta_X(\gamma)\to Y/\vartheta_Y(\gamma), \quad \Upsilon_{\gamma,1}(\bar{x}_\gamma,x_2)=\Pi_Y^\gamma\Upsilon(x,x_2), \quad x\in\bar{x}_\gamma,$$

является условно α-накрывающим, замкнутым и $y_\gamma=\Pi_Y^\gamma y\in\Upsilon_{\gamma,1}(X/\vartheta_X(\gamma),x_2)$; при любом $x_1\in X$ отображение

$$\Upsilon_{1,\gamma}(x_1,\cdot): X/\vartheta_X(\gamma)\to Y/\vartheta_Y(\gamma), \quad \Upsilon_{1,\gamma}(\bar{x}_\gamma,x_2)=\Pi_Y^\gamma\Upsilon(x_1,x), \quad x\in\bar{x}_\gamma,$$

является β*-липшицевым. Тогда существует определенное на* $(0,\gamma]$ *решение уравнения* (5), *для произвольного* $u\in X$ *в множестве таких решений найдется элемент* $\bar z_\gamma$, *удовлетворяющий оценке*

$$d_X(\bar z_\gamma,\bar u_\gamma)\leqslant(\alpha-\beta)^{-1}\rho_Y\big(y,F(u)\big).$$

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\beta\geqslant 0$. Вольтеррово на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$ отображение $G:X\to Y$ будем называть *локально* β*-липшицевым в* 0 *на соответствующих системах* $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$, если существует такое $u^0\in X$, что для любого $r>0$ найдется $\tau\in(0,1)$, для которого при всех $\bar x_\tau,\bar v_\tau\in B_{X/\vartheta_X(\tau)}(\bar u^0_\tau,r)$, где $\bar u^0_\tau=\Pi^\tau_X u^0$, выполнено

$$d_Y\big(G_\tau(\bar x_\tau),G_\tau(\bar v_\tau)\big)\leqslant\beta d_X\big(\bar x_\tau,\bar v_\tau\big). \tag{6}$$

Отображение G назовем *локально* β*-липшицевым в точке* $\gamma\in(0,1)$ *на системах* $\mathfrak{V}_X$, $\mathfrak{V}_Y$, если для любого $\bar u_\gamma\in X/\vartheta_X(\tau)$ существует такое $u^0\in\bar u_\gamma$, что для любого $r>0$ найдется $\tau\in(\gamma,1)$, для которого при всех $\bar x_\tau,\bar v_\tau\in B_{X/\vartheta_X(\tau)}(\bar u^0_\tau,r)$, удовлетворяющих при любом $\varsigma\in(0,\gamma)$ вложению $\bar x_\tau,\bar v_\tau\subset\bar u^0_\varsigma$, где $\bar u^0_\varsigma=\Pi^\varsigma_X u^0$, выполнено (6). Отображение G назовем *локально* β*-липшицевым на системах* $\mathfrak{V}_X$, $\mathfrak{V}_Y$, если оно является локально β-липшицевым на этих системах в любой точке $\gamma\in[0,1)$.

Теперь сформулируем основной результат — теорему о существовании и продолжаемости решений уравнения (5). По-прежнему предполагаем, что $F(x)=\Upsilon(x,x)$, где отображение $\Upsilon:X^2\to Y$ вольтеррово по каждому аргументу на системах $\mathfrak{V}_X, \mathfrak{V}_Y$.

Т е о р е м а. *Пусть при любом* $\gamma\in(0,1)$ *отношение эквивалентности* $\vartheta_X(\gamma)$ *удовлетворяет условию* (3). *Пусть существуют такие* $\alpha>0$, $0\leqslant\beta<\alpha$, *что при любом* $x_2\in X$ *отображение* $\Upsilon(\cdot,x_2):X\to Y$ *является условно* α*-накрывающим, замкнутым и* $y\in\Upsilon(X,x_2)$; *при любом* $x_1\in X$ *отображение* $\Upsilon(x_1,\cdot):X\to Y$ *является локально* β*-липшицевым на системах* $\mathfrak{V}_X$, $\mathfrak{V}_Y$. *Тогда уравнение* (5) *локально разрешимо, любое локальное решение является частью глобального или предельно продолженного решения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтера // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33-56.

2. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики. // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Вып. 8. Т. 1. С. 1-25.

3. *Жуковский Е.С.* Обобщенно вольтерровые операторы в метрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественнные и технические науки. 2009. Т. 14. № 3. С. 501-508.

4. *Жуковский Е.С., Жуковская Т.В., Алвеш М.Ж.* Корректность уравнений с обобщенно вольтерровыми отображениями метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. № 6. С. 1669-1672.

5. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки. Докл. РАН. 2007. Т. 416, №2. С. 151-155.

6. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 105-127.

7. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной Дифференциальные уравнения. 2009. № 5. С. 613-634.

8. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Zhukovskiy E.S.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear volterra equations // Nonlinear Analysis. 2012. V. 75. № 3. P. 1026-1044. DOI: 10.1016/j.na.2011.03.038

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00626) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013гг. (соглашение № 14.132.21.1348).

Zhukovskiy E.S., Alves M.J. EQUATIONS WITH VOLTERRA ON A SYSTEM OF RELATIONS COVERING MAPPINGS OF METRIC SPACES

The paper is concerned with solvability of a general type equation with a generalized Volterra mapping of metric spaces. The Volterra property is defined as the property of a mapping to preserve an equivalence relation system. Under a proper choice of a system of relations, this concept is equivalent to the known interpretations of the evolution property, causality of operators, including the classical definition of Volterra property in the sense of A.N. Tikhonov. A theorem on existence and continuation of solutions is proved; statements about covering mappings of metric spaces are used.

Key words: Volterra equation; local solutions; continuation of solutions; generalized Volterra equation; covering mapping of matric spaces.

УДК 517.968.4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© **Е.С. Жуковский, Ж.П Мунембе, Е.А. Плужникова**

Ключевые слова: векторные накрывающие отображения метрических пространств; функциональные уравнения; запаздывание.

Рассматривается система уравнений неявного вида с запаздывающим аргументом в пространстве суммируемых с любой степенью вектор-функций, имеющих значения в заданном множестве. Получены условия существования решения на заданном интервале времени. Исследование основано на утверждениях о векторных накрывающих отображениях.

Данная работа продолжает исследования [1] функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений. Рассматривается уравнение неявного вида с запаздывающим аргументом в пространстве суммируемых с любой степенью функций, имеющих значения в заданном множестве. Исследование основано на результатах работы [2] о векторных накрывающих отображениях. Используется определение накрывающего и условно накрывающего отображения из [3].

Обозначим $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^l$. Пусть задано $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и измеримое (многозначное) отображение $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$, для которого $\rho_{\mathbb{R}^l}(0,\Omega) \in L_p([a,b],\mathbb{R})$, где $\rho_{\mathbb{R}^l}\big(0,\Omega(t)\big) = \inf_{\omega\in\Omega(t)} |\omega|$. Определим полное метрическое пространство $L_p([a,b],\Omega)$ суммируемых в p-ой степени, если $1 \leqslant p < \infty$, и существенно ограниченных при $p = \infty$ функций $t \in [a,b] \mapsto y(t) \in \Omega(t)$, с метрикой

$$\rho_{L_p}(y_1,y_2) = \left(\int_a^b |y_1(s)-y_2(s)|^p ds\right)^{1/p}, \ \ p \neq \infty; \quad \rho_{L_\infty}(y_1,y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} |y_1(s)-y_2(s)|.$$

Пусть заданы числа $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$; измеримые отображения $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_1})$, $\Theta : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$, для которых $\rho_{\mathbb{R}^{l_1}}(0,\Omega) \in L_{p_1}([a,b],\mathbb{R})$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}(0,\Theta) \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R})$; удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a,b] \times \mathbb{R}^{l_1} \to \mathbb{R}^{l_2}$ такая, что $g\big(t,\Omega(t)\big) \subset \Theta(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$. В случае $p_1 \neq \infty$ относительно функции g будем предполагать, что существуют $\eta \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in \Omega(t)$